

对流占优的扩散问题的局部间断 Galerkin 方法

王阿霞^{1,2}, 马逸尘¹

(1. 西安交通大学理学院, 710049, 西安; 2. 长安大学理学院, 710064, 西安)

摘要: 针对具有周期性边界条件对流占优的扩散问题中的二阶导数, 引入辅助变量, 构造了局部间断 Galerkin (LDG) 方法, 并给出了方法的稳定性结果和误差估计式. 局部间断 Galerkin 方法是 Runge-Kutta 间断 Galerkin 方法的推广, 具有高阶精度, 能够灵活处理复杂区域, 易于处理复杂边界的边值问题, 能够有效去除近似解在间断、大梯度处产生的虚假振荡. 数值实验说明, 当有限元空间取为一次多项式空间时, LDG 方法具有二阶收敛, 误差满足理论估计式. 该方法可以推广到更高阶的方程, 如 Korteweg-de Vries 方程、重调和方程等.

关键词: 局部间断 Galerkin 方法; 对流占优的扩散问题; 高阶精度; 误差估计

中图分类号: O241.82 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2008)02-0234-04

Local Discontinuous Galerkin Method for Convection-Dominated Diffusion Problems

WANG Axia^{1,2}, MA Yichen¹

(1. School of Sciences, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China; 2. School of Sciences, Chang'an University, Xi'an 710064, China)

Abstract: Local discontinuous Galerkin method (LDGM) for convection-dominated diffusion problems with periodic boundary conditions is constructed. To deal with the derivative of second order, an auxiliary variable is introduced. The stability and error estimations are presented simultaneously. LDGM is an extension of the Runge-Kutta discontinuous Galerkin method with higher accuracy and flexibility, especially for complicated geometries and boundaries. The method enables to effectively remove the spurious oscillations around the discontinuities or strong gradients regions. The numerical experiments show that second order convergence can be obtained when polynomials of degree 1 are chosen and the numerical errors are consistent with the theoretical error estimations. It can be extended to solve partial differential equations with higher order such as KdV equations and biharmonic equations.

Keywords: local discontinuous Galerkin method; convection-dominated diffusion problems; high-order accuracy; error estimations

局部间断 Galerkin (LDG) 方法是由 Bassi、Rebay 在求解可压缩 Navier-Stokes 方程时提出的, 是 Cockburn、Shu 为代表提出的 Runge-Kutta 间断 Galerkin (RKDG) 方法在对流扩散问题中的推广, 并由 Cockburn、Shu 推广到一般的对流扩散问题. LDG 方法具有高阶精度, 能够灵活处理复杂区域,

易于处理复杂边界的边值问题的优点. 同时, 由于单元基函数在单元交界处允许出现间断, 可以通过适当地选取基函数使得质量矩阵是分块对角的, 而且每一块的阶数和相应单元的自由度相同, 单元之间只需要相邻单元的自由度, 从而处理器之间的信息传递量保持最小, 有利于并行算法的实现. 由于近似

解的间断性假设,对网格正则性要求不高,不需要考虑像一般有限元方法中连续性的限制就可以对网格进行加密或减疏处理,而且不同的剖分单元可以采用不同形式、不同次数的逼近多项式,有利于自适应网格的形成,并且能够捕获精确解的间断性或大梯度而不会产生虚假振荡^[1-5].

LDG 在许多方面的应用上显示了前所未有的效能,在解决含有间断现象的问题中发挥越来越大的作用.它在解决对流扩散方程、Korteweg-de Vries(KdV)方程、量子流体力学方程、磁流体力学方程、黏弹性流体方程、Maxwell 方程等问题中都是卓有成效的^[3,6-7].

本文针对对流扩散问题中的二阶导数,引入辅助变量,将二阶导数化为一阶导数的导数,构造了局部间断 Galerkin 方法,并给出了方法的稳定性结果和误差估计式.数值实验说明了方法的稳定性和误差估计理论的正确性.该方法可以推广到更高阶的方程如 KdV 方程、重调和方程等^[8-10].

1 局部间断 Galerkin 方法的构造

考虑对流扩散方程

$$\left. \begin{aligned} \partial_t u + \partial_x(f(u) - a(u)\partial_x u) &= 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x) \\ (x, t) \in [0, T] \times [0, 1] & \quad x \in [0, 1] \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

及周期性边界条件,这里 $0 \leq a(u) \leq a$.

由于存在二阶导数项,一般的间断 Galerkin 方法不能收敛到真解.局部间断 Galerkin 方法的思想是通过引入一个中间变量,将二阶导数化为一阶导数的导数,即引入 $q = (a(u))^{1/2} \partial_x u$,那么问题(1)可转化为

$$\left. \begin{aligned} \partial_t u + \partial_x(f(u) - a(u)\partial_x u) &= 0 & (x, t) \in [0, T] \times [0, 1] \\ q - \partial_x g(u) &= 0 & (x, t) \in [0, T] \times [0, 1] \\ u(x, 0) &= u_0(x) & x \in [0, 1] \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中: $g(u) = \int_0^u (a(s))^{1/2} ds$.

利用间断 Galerkin 方法离散问题(2)即得局部间断 Galerkin 方法.剖分区间为 $[0, 1]$,单元集合记为 $I_j = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$, $j = 1, 2, \dots, N$,其中 $x_{1/2} = 0, x_{N+1/2} = 1$.定义离散区间中点为 $x_j = \frac{1}{2}(x_{j-1/2} + x_{j+1/2})$,单元长度为 $\Delta x_j = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}$,单元长度不一定是一致的.设有限元空间为 $V_h = \{v: v \in$

$L^1[0, 1], v|_{I_j} \in P^k(I_j), j = 1, 2, \dots, N\}$, $\dim V_h = (k+1)N$.

定义流通量

$$h(u, q) = (h_u, h_q)^t = (f(u) - a(u)q, -g(u))^t$$

分别用任意的光滑函数 $v(x), s(x), z(x)$ 乘方程组的两端,并在 I_j 上进行分部积分,求

$$w(x, t) = (u(x, t), q(x, t))^t$$

满足

$$\begin{aligned} & \int_{I_j} \partial_t u(x, t) v(x) dx - \int_{I_j} h_u(w(x, t)) \partial_x v(x) dx + \\ & h_u(w(x_{j+1/2}, t)) v(x_{j+1/2}^-) - \\ & h_u(w(x_{j-1/2}, t)) v(x_{j-1/2}^+) = 0 \\ & \int_{I_j} q(x, t) s(x) dx - \int_{I_j} h_q(w(x, t)) \partial_x s(x) dx + \\ & h_q(w(x_{j+1/2}, t)) s(x_{j+1/2}^-) - \\ & h_q(w(x_{j-1/2}, t)) s(x_{j-1/2}^+) = 0 \\ & \int_{I_j} u(x, 0) z(x) dx = \int_{I_j} u_0(x) z(x) dx \\ & \forall v(x), s(x), z(x) \end{aligned}$$

用有限元空间近似函数 u_h, q_h, v_h, s_h, z_h 代替 u, q, v, s, z , 数值流通量 $\hat{h}((w_h)_{j+1/2}(t)) = (\hat{h}_u((w_h)_{j+1/2}(t)), \hat{h}_q((w_h)_{j+1/2}(t)))^t$ 代替非线性流通量 $h(w(x_{j+1/2}, t))$, 则有问题的弱形式如下.

求 $w_h(x, t) = (u_h(x, t), q_h(x, t))^t$, 满足

$$\begin{aligned} & \int_{I_j} \partial_t u_h(x, t) v_h(x) dx - \\ & \int_{I_j} h_u(w_h(x, t)) \partial_x v_h(x) dx + \\ & \hat{h}_u(w_h(x_{j+1/2}, t)) v_h(x_{j+1/2}^-) - \\ & \hat{h}_u(w_h(x_{j-1/2}, t)) v_h(x_{j-1/2}^+) = 0 \end{aligned} \quad (3a)$$

$$\begin{aligned} & \int_{I_j} q_h(x, t) s_h(x) dx - \\ & \int_{I_j} h_q(w_h(x, t)) \partial_x s_h(x) dx + \\ & \hat{h}_q(w_h(x_{j+1/2}, t)) s_h(x_{j+1/2}^-) - \\ & \hat{h}_q(w_h(x_{j-1/2}, t)) s_h(x_{j-1/2}^+) = 0 \end{aligned} \quad (3b)$$

$$\begin{aligned} & \int_{I_j} u_h(x, 0) z_h(x) dx = \int_{I_j} u_0(x) z_h(x) dx \\ & \forall v(x), s(x), z(x) \in V_h \end{aligned} \quad (3c)$$

下面,考虑数值流通量 $\hat{h}((w_h)_{j+1/2}(t))$ 的选取.与 Runge-Kutta 间断 Galerkin 方法中数值流通量形式一致^[4], 记 $\hat{h}((w_h)_{j+1/2}(t)) \equiv \hat{h}((w_h)_{j+1/2}, t)$,

$w_h(x_{j+1/2}^+, t)$), 它满足如下几个性质:

(1) 局部 Lipschitz 连续且与数值流通量 h 相容;

(2) 可利用 u_h 对 q_h 进行局部(逐个单元)求解;

(3) 当 $a(\cdot) \equiv 0$, 简化为 Engquist-Osher 数值流通量(E-flux);

(4) 确保方法的 L^2 稳定性.

为了反映问题的对流扩散性, 将数值流通量写成对流流通量与扩散流通量的和的形式

$$\hat{h}(w^-, w^+) = \hat{h}_{\text{conv}}(w^-, w^+) + \hat{h}_{\text{diff}}(w^-, w^+) \quad (4)$$

引入记号

$$\begin{aligned} [p] &= p^+ - p^- \\ \bar{p} &= \frac{1}{2}(p^+ + p^-) \\ p_{j+1/2}^\pm &= p(x_{j+1/2}^\pm) \end{aligned}$$

选取

$$\begin{aligned} \hat{h}_{\text{conv}}(w^-, w^+) &= (\hat{f}(u^-, u^+), 0)^t \quad (5) \\ \hat{h}_{\text{diff}}(w^-, w^+) &= \left(-\frac{[g(u)]}{[u]} \bar{q}, -\bar{g}(u) \right)^t - \mathbf{C}_{\text{diff}}[w] \quad (6) \end{aligned}$$

其中 $\hat{f}(u^-, u^+)$ 是非线性项 f 的局部 Lipschitz E-flux.

$$\mathbf{C}_{\text{diff}} = \begin{bmatrix} 0 & c_{12} \\ -c_{12} & 0 \end{bmatrix}, c_{12} = c_{12}(w^-, w^+) \text{ 是局部}$$

Lipschitz, 当 $a(\cdot) \equiv 0$ 时, $c_{12} \equiv 0$.

实际计算时, 将式(4)~式(6)定义的数值流通量写成以下形式

$$\begin{aligned} \hat{h}(w^-, w^+) &= \left(\frac{[\varphi(u)]}{[u]} - \frac{[g(u)]}{[u]} \bar{q}, \right. \\ &\quad \left. -\bar{g}(u) \right)^t - \mathbf{C}[w] \quad (7) \end{aligned}$$

$$\text{式中: } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ -c_{12} & 0 \end{bmatrix}; c_{11} = \frac{1}{[u]} \left(\frac{[\varphi(u)]}{[u]} - \hat{f}(u^-, u^+) \right), \varphi(u) = \int_0^u f(s) ds.$$

$$\hat{f}(u^-, u^+) \text{ 是 E-flux, 即 } \hat{f}(a, b) = \int_0^b \min(f'(s), 0) ds + \int_0^a \max(f'(s), 0) ds + f(0)$$

可以证明^[7]这个数值流通量可以满足上面的 4 条性质.

2 LDG 方法的稳定性及误差估计^[7]

定理 1(稳定性) 对流扩散问题在采用式(7)表示的数值流通量时稳定性为

$$\frac{1}{2} \int_0^1 u_h^2(x, T) dx + \int_0^T \int_0^1 \max(f'(s), 0) dx dt +$$

$$\Theta_{T,C}([w_h]) \leq \frac{1}{2} \int_0^1 u_0^2(x) dx$$

式中

$$\Theta_{T,C}([w_h]) = \int_0^T \sum_{1 \leq j \leq N} \{ [w_h(t)]^t C [w_h(t)] \}_{j+1/2} dt$$

定理 2(误差估计) 假设逼近误差 $e = w - w_h$, 则

$$\begin{aligned} \int_0^1 |e_u(x, T)|^2 dx + \int_0^T \int_0^1 |e_q(x, T)|^2 dx dt + \\ \Theta_{T,C}([e_h]) \}^{\frac{1}{2}} \leq c(\Delta x)^k \end{aligned}$$

式中: $c = c(k, |u|_{k+1}, |u|_{k+2})$.

3 算例^[7]

考虑线性对流扩散问题

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x u - \epsilon \partial_{xx} u = 0 & (x, t) \in [0, T] \times [0, 2\pi] \\ u(x, 0) = \sin x & x \in [0, 2\pi] \end{cases} \quad (8)$$

及周期性边界条件, 其精确解是 $u(x, t) = e^{-\epsilon t} \sin(x-t)$. 取有限元空间为一次多项式空间, 即 $k=1$, 基函数选取为 $\varphi_0^j(x) = 1, \varphi_1^j(x) = x - x_j / \Delta x_j$.

由式(7)计算数值流通量函数 $\hat{h}$, 其中 $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\epsilon^{1/2} \\ \epsilon^{1/2} & 0 \end{bmatrix}$, 具体计算步骤如下.

(1) 初始条件的处理. 令 $z_h(x) = \varphi_m^j(x), m=0, 1$, 由式(3c)解出 $u_l^j(x), l=0, 1, j=1, 2, \dots, N$.

(2) 边界条件的处理. $x \in I_0 = [x_{-1/2}, x_{1/2}] = [-x_{3/2}, 0], u(x) = u(x+2\pi), \sum_{l=0}^1 u_l^0(t) \varphi_l^0(x) = \sum_{l=0}^1 u_l^N(t) \varphi_l^N(x+2\pi)$, 解出 $u_l^0(x), l=0, 1$.

(3) 设 $q_h(x, t) = \sum_{l=0}^1 q_l^j(t) \varphi_l^j(x), j=1, 2, \dots, n$, 取 $s_h(x) = \varphi_m^j(x), m=0, 1$, 由式(3b)解出 $q_l^j(t), l=0, 1$, 即得 $q_h(x, t)$.

(4) 设数值解 $u_h(x, t) = \sum_{l=0}^1 u_l^j(t) \varphi_l^j(x)$, 取 $v_h(x) = \varphi_m^j(x), m=0, 1$ 代入式(3a), 可得一个常微分方程(ODE), 记作 $y' = F(y)$.

采用二阶 Runge-Kutta 方法, 求解 ODE

$$y^{(1)} = y^n + \Delta t F(y^n)$$

$$y^{n+1} = \frac{1}{2} [y^n + y^{(1)} + \Delta t F(y^{(1)})]$$

网格剖分数 N 为 10、20、40、80、160、320, 计算到时间 $t=1$, 采用 L^2 模误差估计

$$e_h^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [u_{\text{exact}}(x, t) - u_h(x, t)]^2 dx$$

收敛的阶数 $\alpha = \text{lb}(e_{2h}/e_h)/\text{lb}2$, 不同的 ϵ 及 Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) 条件数得到的结果分别如表 1~表 3 所示. 可以看出, 有限元空间取为一次多项式空间时, LDG 方法具有二阶收敛, 误差满足理

表 1 $\epsilon=1$ 、CFL 条件数为 0.01 时的计算结果

N	L^2 误差估计	α
10	1.6107×10^{-2}	
20	3.9761×10^{-3}	2.0183
40	9.8925×10^{-4}	2.0069
80	2.4683×10^{-4}	2.0028
160	6.1654×10^{-5}	2.0013
320	1.5408×10^{-5}	2.0006

表 2 $\epsilon=0.1$ 、CFL 条件数为 0.1 时的计算结果

N	L^2 误差估计	α
10	3.8771×10^{-2}	
20	9.6910×10^{-3}	2.0002
40	2.4189×10^{-3}	2.0023
80	6.0432×10^{-4}	2.0010
160	1.5105×10^{-4}	2.0003
320	3.7759×10^{-5}	2.0001

表 3 $\epsilon=0.01$ 、CFL 条件数为 1 时的计算结果

N	L^2 误差估计	α
10	0.5840	
20	1.1939×10^{-2}	5.6123
40	2.6627×10^{-3}	2.1648
80	6.6199×10^{-4}	2.0080
160	1.6531×10^{-4}	2.0016
320	4.1316×10^{-5}	2.0004

论估计式. 特别是, $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 求解的问题是对流占优问题, LDG 方法仍具有较高的精度和令人满意的 L^2 误差.

参考文献:

- [1] 刘儒勋, 舒其望. 计算流体力学的若干新方法[M]. 北京: 科学出版社, 2003.
- [2] 马逸尘, 梅立泉, 王阿霞. 偏微分方程现代数值方法[M]. 北京: 科学出版社, 2006.
- [3] KANSCHAT B C, SCHÖTZAU D. The local discontinuous Galerkin method for linearized incompressible fluid flow: a review[J]. Computers and Fluids, 2005, 34:491-506.
- [4] COCKBURN B, SHU C W. The Runge-Kutta method local projection P^1 -discontinuous Galerkin method for scalar conservation law[J]. Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 1991, 25:337-361.
- [5] COCKBURN B, SHU C W. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws: II [J]. Mathematics of Computation, 1989, 52:411-435.
- [6] COCKBURN B, HOUAND S, SHU C W. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws: IV [J]. Mathematics of Computation, 1990, 54:545-581.
- [7] COCKBURN B, SHU C W. The local discontinuous Galerkin for time dependent convection-diffusion systems[J]. SIAM Journal of Numerical Analysis, 1998, 175:2440-2463.
- [8] BASSI F, REBAY S. A high-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible Navier-Stokes equations[J]. Journal of Computational Physics, 1997, 131:267-279.
- [9] LOMTEV I, KARNIADAKIS G E. A discontinuous Galerkin method for the Navier-Stokes equations[J]. Journal for Numerical Methods in Fluids, 1999, 29:587-603.
- [10] JOHNSON C. Numerical solution of partial differential equations by the finite element method[M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1994.

(编辑 杜秀杰)